# Programación Dinámica. Ejercicio I (Dynamic Programming. Exercise I) Metodología de Optimización Dinámica

Economía para Todos
Jacques Lartigue Mendoza

Noviembre 3, 2020

## Resuelve el siguiente problema de optimización dinámica, utilizando programación dinámica

**Problema:** Existe un agente económico representativo que vive infinitos períodos. Su utilidad (satisfacción) instantánea $u_t$ depende exclusivamente del consumo, $c_t$; siendo la utilidad marginal positiva pero decreciente, representada a través de una función de utilidad logarítmica, $u_t = ln(c_t)$. Su capital se deprecia completamente cada período, $\delta = 1$, y su función de producción es $f(k_t) = k_t^{\alpha}$. Enfrenta tanto a la restricción de los recursos (resource constraint) usual, en donde el consumo más la inversión bruta, $i_t$, debe ser igual o menor que la producción, $f(k_t)$; como a la regla de evolución del capital usual, en donde la inversión neta, $k_{t+1} - k_t$, es igual a la inversión bruta menos la depreciación, $\delta k_t$.

Indicaciones: Utiliza tantos períodos como sean necesarios para encontrar las funciones de política (policy functions) y la función de valor (value function) que solucionen el problema.

**Formalmente el problema a resolver es**

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta u(c_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta ln(c_t) \tag{1}$$

s.a.

$$c_t + i_t \leq k_t^{\alpha} \tag{2}$$

$$k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t \tag{3}$$

en donde

$$k_0 \ dado; \quad \delta = 1$$

## Solución

### 1. Simplificación del problema antes de resolverlo

Para resolver más facilmente cualquier problema, sin importar la técnica, antes de resolverlo se debe simplificar lo más posible.

- **a) Combinamos las 2 restricciones en una sola.** Podemos reescribir la ecuación (3) como $i_t = k_{t+1} - k_t + \delta k_t$, como $\delta = 1$ la ecuación previa se puede escribir como $i_t = k_{t+1}$. Este resultado lo sustituimos en la ecuación (2), obteniendo $c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha}$. Así, el problema a resolver es

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta u(c_t) = \max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta ln(c_t) \tag{4}$$

s.a.

$$c_t + k_{t+1} \leq k_t^{\alpha} \tag{5}$$

en donde

$$k_0 \; dado; \quad \delta = 1$$

- **b) Introducimos la restricción en la función objetivo.** Dado que la utilidad marginal del consumo es positiva, sabemos que el agente económico no desperdiciará recursos por lo que en la ecuación (5) $\leq$ *sera* $=$. Así, podemos reescribir la ecuación (5) como $c_t = k_t^{\alpha} - k_{t+1}$ y la introducimos en la función objetivo. Así el problema a resolver

$$\max_{k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta ln(k_t^{\alpha} - k_{t+1})$$

en donde

$$k_0 \; dado; \quad \delta = 1$$

- Nota que: i) La técnica de sustituir la restricción en la función objetivo también es utilizada en problemas estáticos. ii) Con los 2 pasos previos, a y b, nos decisimos de 2 restricciones y una variable de elección (consumo). iii) Como ya no tenemos restricciones, ya no necesitaremos del lagrangiano

## 2. Solucionamos el modelo usando programación dinámica
## 2.1 Solucionamos el último día de vida del agente económico

- a) Planteamos la ecuación de Bellman

$$V_1(k) = \max_{k'}\{ln(k^\alpha - k') + \beta V_0(k')\}$$

en donde sabemos que $c = k^\alpha - k'$

- b) Encontramos la policy funcition para nuestra única variable de control

El agente económico no tiene herederos, por lo que es óptimo no dejar capital para cuando esté muerto

$$g_1^k = k' = 0$$

- c) Sustituimos la policy function en la value function, retirando el max, ya que a través de la policy function se cumple la orden de maximizar la función objetivo (la value function). $\beta V_0(k') = 0$ porque para ese día el agente económico está muerto, por lo que

$$V_1(k) = lnk^\alpha \quad \rightarrow \quad V_1(k) = \alpha lnk$$

## 2.2 Solucionamos el penúltimo día de vida

- a) Planteamos la ecuación de Bellman

$$V_2(k) = \max_{k'}\{ln(k^{\alpha} - k') + \beta V_1(k')\}$$

- b) Sustituimos la value function del último día de vida en la value function del penúltimo día

Como k en el último día de vida es k' en el penúltimo, intercambiamos k por k' al insertar la value function del último día en la del penúltimo día

$$V_2(k) = \max_{k'}\{ln(k^{\alpha} - k') + \beta\alpha ln k'\}$$

- c) Obtenemos la policy function de este día de vida, a través de las Condiciones de Primer Orden (CPO)

CPO

$$k' : \quad \frac{-1}{k^{\alpha} - k'} + \frac{\alpha\beta}{k'} = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{k^{\alpha} - k'} = \frac{\alpha\beta}{k'}$$

$$k' = \alpha\beta(k^{\alpha} - k') \quad \rightarrow \quad k' + \alpha\beta k' = \alpha\beta k^{\alpha}$$

$$g_2^k(k) = k' = \frac{\alpha\beta k^{\alpha}}{1 + \alpha\beta}$$

- d) Sustituimos la policy function en la value function, quitando el max

$$V_2(k) = \max_{k'}\{ln(k^\alpha - k') + \alpha\beta lnk'\}$$

$$V_2(k) = ln[(1 - \frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta})k^\alpha] + \alpha\beta(ln(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta})k^\alpha))$$

- e) Reordenamos la función, a efecto de quedarnos con una sola variable de estado ($k$) al final de la función, y únicamente parámetros al principio de ésta

$$V_2(k) = ln[(\frac{1\cancel{+\alpha\beta}\cancel{-\alpha\beta}}{1+\alpha\beta})k^\alpha] + \alpha\beta(ln(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}k^\alpha))$$

utilizando la regla $ln(bc) = ln(b) + ln(c)$

$$V_2(k) = ln(\frac{1}{1+\alpha\beta}) + \alpha lnk + \alpha\beta ln(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}) + \alpha\beta\alpha lnk$$

$$V_2(k) = ln(\frac{1}{1+\alpha\beta}) + \alpha\beta ln(\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta}) + (1+\alpha\beta)\alpha lnk$$

Quedando finalmente como value function para el penúltimo día de vida

$$V_2(k) = \phi_1 + (1+\alpha\beta)\alpha lnk$$

en donde

$$\phi_1 = ln(\frac{1}{1+\alpha\beta}) + \alpha\beta(ln\frac{\alpha\beta}{1+\alpha\beta})$$

## 2.3 Solucionamos el antepenúltimo día de vida

- a) Planteamos la ecuación de Bellman

$$V_3(k) = \max_{k'}\{ln(k^{\alpha} - k') + \beta V_2(k')\}$$

- b) Sustituimos la value function del penúltimo día de vida en la value function del antepenúltimo día

$$V_3(k) = \max_{k'}\{ln(k^{\alpha} - k') + \beta(\phi_1 + (1 + \alpha\beta)\alpha lnk'\}$$

- c) Obtenemos la policy function de este día de vida, a través de las Condiciones de Primer Orden (CPO)

CPO

$$k': \quad \frac{1}{k^{\alpha} + k'} = \frac{\alpha\beta(1+\alpha\beta)}{k'} \; \rightarrow \; k' = (k^{\alpha} - k')[\alpha\beta(1+\alpha\beta)]$$

$$k' + \alpha\beta(1+\alpha\beta)k' = \alpha\beta(1+\alpha\beta)k^{\alpha}$$

$$k'(1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2) = \alpha\beta(1+\alpha\beta)k^{\alpha}$$

Quedando como policy function para este día

$$g_3^{k'}(k) = k' = \frac{\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}k^{\alpha}$$

- d) Sustituimos la policy function en la value function, quitando el max

$$V_3(k) = \max_{k'}\{ln(k^{\alpha} - k') + \beta(\phi_1 + (1 + \alpha\beta)\alpha lnk'\}$$

$$V_3(k) = ln[(1 - \frac{\alpha\beta + (\alpha\beta)^2}{1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2})k^{\alpha}] + \beta\phi_1$$
$$+(\beta + \alpha\beta^2)\alpha ln[\frac{\alpha\beta + (\alpha\beta)^2 k^{\alpha}}{1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2}]$$

- e) Reordenamos la función, a efecto de quedarnos con una sola variable de estado ($k$) al final de la función, y únicamente parámetros al principio de ésta

$$V_3(k) = ln[\frac{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2-\alpha\beta-(\alpha\beta)^2}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}k^{\alpha}] + \beta\phi_1 + (\beta+\alpha\beta^2)\alpha ln[(\frac{\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}) + \alpha lnk]$$

$$\textit{Definiendo} \quad \phi_2 = ln\frac{1}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2} + \beta\phi_1 + (\alpha\beta+(\alpha\beta)^2)ln(\frac{\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2}$$

$$V_3(k) = \phi_2 + lnk^{\alpha} + (\alpha\beta+(\alpha\beta)^2)\alpha lnk$$

$$V_3(k) = \phi_2 + (1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2)\alpha lnk$$

**2.4 Nos percatamos que la policy function y la value function convergen a formas funcionales específicas**

Si seguimos el mismo procedimiento para T periodos obtendremos:

$$g_T^{k'}(k) = k' = \frac{\alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + ........ + (\alpha\beta)^T}{1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + ...... + (\alpha\beta)^T} k^{\alpha}$$

$$V_T(k) = \phi_T + (1 + \alpha\beta + (\alpha\beta)^2 + ...... + (\alpha\beta)^T)\alpha lnk$$

Si T$=\infty$ podemos utilizar la fórmula $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \alpha x^n = \frac{a}{1-x}$ por lo que

$$\lim_{T\to\infty} g_T^{k'}(k) = \frac{\alpha\beta[1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2+......+(\alpha\beta)^T]}{1+\alpha\beta+(\alpha\beta)^2+......+(\alpha\beta)^T} k^\alpha = \frac{\alpha\beta\cancel{(\frac{1}{1-\alpha\beta})}}{\cancel{\frac{1}{(1-\alpha\beta)}}} k^\alpha$$

Así, la policy function general, cuyo seguimiento permitirá al agente económico tomar la decisión óptima, maximizando con ello el flujo de utilidad del resto de su vida es

$$\lim_{T\to\infty} g_T^{k'}(k) = \alpha\beta k^\alpha$$

Obteniéndose la siguiente value function

$$\lim_{T\to\infty} V_T(k) = \lim_{T\to\infty} \phi_T + \frac{1}{1-\alpha\beta} lnk^\alpha$$