Optimización Dinámica. Métodos Secuenciales. Modelos de Crecimiento Económico en T períodos.

Economía para Todos
Jacques Lartigue Mendoza

Octubre 26, 2020

Vamos a construir un modelo en el que

- Existe un agente económico representativo, dueño de los medios de producción, por lo que no es necesario ni la existencia de un mercado ni de precios
- El agente económico vive durante T períodos
- Su satisfacción proviene del consumo
- No existe gobierno ni comercio con el exterior

Siguiendo lo que se observa en los seres humanos y en toda economía:

- La utilidad marginal del consumo será positiva pero decreciente, y cumplirá con las condiciones de Inada
- La economía tendrá una restricción de producción, la cual indica que el consumo más la inversión no pueden ser mayores a la producción
- Existe una regla de evolución del capital. La cual indica que la inversión neta es igual a la evolución bruta menos la depreciación

Formalmente nuestro modelo lo podemos escribir como

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t)$$

en donde

$$U'(c) > 0, \qquad U''(c) < 0, \qquad \lim_{c \to 0} U'(c) = \infty \qquad \forall t$$

sujeto a la restricción de la producción

$$c_t + i_t \leq f(k_t) \qquad \forall t$$

a la regla de evolución del capital

$$k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t \qquad \forall t$$

y a que el consumo y el capital no pueden ser negativos

$$k_0 \; dado, \qquad c_t \geq 0, \qquad k_{t+1} \geq 0 \qquad \forall t$$

Para simplificar el modelo, podemos reducir el número de reestricciones reescribiendo la regla de evolución del capital $k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t$ como $k_{t+1} - (1-\delta)k_t = i_t$ y combinarla con la restricción de la producción $c_t + i_t \leq f(k_t)$, quedando

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq f(k_t)$$

Así, podemos reescribir el modelo como

$$\max_{c_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{T} \beta^t U(c_t)$$

sujeto a

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq f(k_t) \qquad \forall t$$

$$k_0 \ dado, \qquad c_t \geq 0, \qquad k_{t+1} \geq 0 \qquad \forall t$$

La solución del modelo nos deberá proporcionar la ecuación de Euler.

- La ecuación de Euler nos proporciona una condición que se debe cumplir en el óptimo, respecto a la transferencia de recursos a través del tiempo
- La óptima asignación de los recursos implica en un modelo del consumidor estático que la Tasa Marginal de Sustitución sea tangente a la restricción presupuestaria, mientras que en un modelo dinámico que la ecuación de Euler se cumpla

Para resolver este modelo vamos a utilizar el lagrangiano y las condiciones de Kuhn-Tucker:

- Condiciones de Primer Orden (CPO)
- Las restricciones de igualdad se deben satisfacer
- Las restricciones de desigualdad se deben satisfacer
- Los multiplicadores deben ser no negativos
- Complementary slackness (cada término del lagrangiano es igual a 0, por lo que ó el multiplicador es cero ó la restricción correspondiente es cero)

Solución del modelo

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} [\beta^t U(c_t) + \lambda_t [f(k_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t] + v_t c_t + H_t k_{t+1}]$$

Obtén tu las C.P.O.

Solución del modelo

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} [\beta^t U(c_t) + \lambda_t [f(k_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t] + v_t c_t + H_t k_{t+1}]$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t U'(c_t) - \lambda_t + v_t = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} f'(k_{t+1}) + \lambda_{t+1}(1-\delta) + H_t = 0$$

Complementary slackness

$$\lambda_t[f(k_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t] = 0 \qquad \forall t = 0, 1, ..., T$$

$$v_t c_t = 0 \qquad H_t k_{t+1} = 0 \qquad \forall t = 0, 1, ..., T$$

Ahora, utilizando la intuición económica, determinas que variables o multiplicadores son $= 0$ y por lo tanto los puedes eliminar

Complementary slackness

$$\lambda_t[f(k_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t] = 0 \qquad \forall t = 0, 1, ..., T$$

$$\cancel{v_t} c_t = 0 \qquad \cancel{H_t} k_{t+1} = 0 \qquad \forall t = 0, 1, ..., T$$

Solución del modelo

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} [\beta^t U(c_t) + \lambda_t [f(k_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t] + v_t c_t + H_t k_{t+1}]$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t U'(c_t) - \lambda_t + \cancel{v_t} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta^t U'(c_t) = \lambda_t \qquad \forall t \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = -\lambda_t + \lambda_{t+1} f'(k_{t+1}) + \lambda_{t+1}(1-\delta) + \cancel{H_t} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\lambda_t = \lambda_{t+1}[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)] \qquad \forall t \quad (2)$$

- Recuerda que en este modelo no existen precios. Los resultados previos, por ejemplo $\beta^t u'(c_t) = \lambda_t$ nos permite percatarnos que los multiplicadores son precios sombra. La relajación marginal de la restricción lleva a un incremento marginal en el objetivo que está siendo maximizado igual al multiplicador
- $\lambda_t =$ valor marginal de los recursos en el tiempo t
- Observa el beneficio de que t esté como exponente de β. Esto permite que en el primer momento del tiempo $t = 0$, $\beta^0 = 1$, por lo que la utilidad marginal del consumo en este primer día de la vida del agente económico no tendrá descuento alguno para traerlo a valor presente

Dado que las condiciones de Inada nos dicen que la utilidad marginal del consumo es infinita cuando el consumo tiende a 0, el consumo no puede ser 0. Adicionalmente, en este modelo se determinó que la utilidad marginal del consumo era positiva, por lo que utilizando la ecuación (1) nos percatamos que $\lambda_t \neq 0$. Así pues, continuando con complementary slackness obtenemos

$$\lambda_t[f(k_t) - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t] = 0$$

por lo tanto

$$f(k_t) = c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \qquad \Longrightarrow$$

$$c_t = f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t \tag{3}$$

Obtenemos la ecuación de Euler

sustituyendo la ecuación (1) en la (2) obtenemos la ecuación de Euler

$$\beta^t u'(c_t) = \beta^{t+1} u'(c_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$

dividiendo ambos lados por β^t la podemos simplificar a

$$u'(c_t) = \beta u'(c_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$

Para obtener la ecuación de Euler como una función que dependa solamente del nivel de capital, sustituimos la ecuación (3) en el resultado previo. Obsérvese que la ecuación obtenida será una ecuación en diferencias de 2do orden, ya que existen 2 rezagos respecto al capital dentro de ésta.

$$u'(f(k_t) - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) =$$
$$\beta u'(f(k_{t+1}) - k_{t+2} + (1-\delta)k_{t+1})[f'(k_{t+1}) + (1-\delta)]$$

Respecto al último día de vida del agente económico representativo

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{T} [\beta^T U(c_T) + \lambda_T [f(k_T) - c_T - k_{T+1} + (1-\delta)k_T] + v_T c_T + H_T k_{T+1}]$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_T} = \beta^T U'(c_T) - \lambda_T + \cancel{v_T} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta^T U'(c_T) = \lambda_T$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{T+1}} = -\lambda_T + H_T = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_T = H_T$$

Como $H_T = \lambda_T$ y esta última es igual a la utilidad marginal descontada del consumo, la cual debe ser positiva, por medio de complementary slackness sabemos que

$$H_T \cancel{k_{T+1}} = 0$$

Es decir, el agente económico representativo deja cero capital para cuando esté muerto, por lo que respecto a la condición de transversalidad

$$B^T U'(C_T) k_{T+1} = 0$$

sabemos que ésta es 0 porque $k_{T+1} = 0$
Así pues tenemos 2 condiciones que nos permiten acotar el problema maximizado (boundary conditions): k_0 y k_{T+1}.

Esperamos te sirva este material