Optimización Dinámica.
Métodos Secuenciales.
Modelo de Crecimiento Económico en 2 períodos

Economía para Todos
Jacques Lartigue Mendoza

Octubre 14, 2020

Vamos a construir un modelo en el que

- Existe un agente económico representativo, dueño de los medios de producción, por lo que no es necesario ni la existencia de un mercado ni de precios
- El agente económico vive solo durante 2 períodos
- Su satisfacción proviene del consumo
- No existe gobierno ni comercio con el exterior

Siguiendo lo que se observa en los seres humanos y en toda economía:

- La utilidad marginal del consumo será positiva pero decreciente, y cumplirá con las condiciones de Inada
- La economía tendrá una restricción de producción. Que indica que el consumo más la inversión no pueden ser mayores a la producción
- Existe una regla de evolución del capital. La cual indica que la inversión neta es igual a la evolución bruta menos la depreciación

Formalmente nuestro modelo lo podemos escribir como

$$MaxU(c_0, c_1) = U(c_0) + \beta U(c_1)$$

en donde

$$U`(c) > 0 \qquad U''(c) < 0 \qquad \lim_{c \to 0} U'(c) = \infty$$

sujeto a la restricción de la producción

$$c_t + i_t \leq f(k_t)$$

a la regla de evolución del capital

$$k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t$$

y a que el consumo y el capital no pueden ser negativos

$$c_0 \geq 0 \qquad c_1 \geq 0 \qquad k_1 \geq 0 \qquad k_2 \geq 0 \qquad k_0 \; dado$$

Para simplificar el modelo, podemos reducir el número de reestricciones reescribiendo la regla de evolución del capital $k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t$ como $k_{t+1} - (1-\delta)k_t = i_t$ y combinarla con la restricción de la producción $c_t + i_t \leq f(k_t)$, quedando

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq f(k_t)$$

Así, podemos reescribir el modelo como

$$MaxU(c_0, c_1) = U(c_0) + \beta U(c_1)$$

sujeto a

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t \leq f(k_t)$$

$$c_0 \geq 0 \qquad c_1 \geq 0 \qquad k_1 \geq 0 \qquad k_2 \geq 0 \qquad k_0 \ dado$$

Dado que la restricción se debe cumplir en cada uno de los dos períodos de tiempo, podemos replantear nuestro modelo formalmente como

$$\max_{c_0, c_1, k_1, k_2} U(c_0, c_1) = U(c_0) + \beta U(c_1)$$

sujeto a

$$c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0 \leq f(k_0)$$

$$c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1 \leq f(k_1)$$

$$c_0 \geq 0 \qquad c_1 \geq 0 \qquad k_1 \geq 0 \qquad k_2 \geq 0 \qquad k_0 \; dado$$

La solución del modelo nos deberá proporcionar la ecuación de Euler.

- La ecuación de Euler nos proporciona una condición que se debe cumplir en el óptimo, respecto a la transferencia de recursos a través del tiempo
- La condición proporcionada por la ecuación de Euler es análoga a la condición de que la Tasa Marginal de Sustitución es tangente a la restricción presupuestaria en un modelo estático

Para resolver este modelo vamos a utilizar el lagrangiano y las condiciones de Kuhn-Tucker:

- Condiciones de Primer Orden (CPO)
- Las restricciones de igualdad se deben satisfacer
- Las restricciones de desigualdad se deben satisfacer
- Los multiplicadores deben ser no negativos
- Complementary slackness (cada término del lagrangiano es igual a 0, por lo que ó el multiplicador es cero ó la restricción correspondiente es cero)

Solución del modelo

$$\mathcal{L} = u(c_o) + \beta u(c_1) + \lambda_0[f(k_0) - c_0 - k_1 + (1-\delta)k_0] + \lambda_1[f(k_1) - c_1 - k_2 + (1-_{\delta})k_1] + v_0 c_0 + v_1 c_1 + H_0 k_1 + H_1 k_2$$

Obtén tu las C.P.O.

Solución del modelo

$$\mathcal{L} = u(c_o) + \beta u(c_1) + \lambda_0[f(k_0) - c_0 - k_1 + (1-\delta)k_0] + \lambda_1[f(k_1) - c_1 - k_2 + (1-_{\delta})k_1] + v_0 c_0 + v_1 c_1 + H_0 k_1 + H_1 k_2$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_0} = u'(c_0) - \lambda_0 + v_0 = 0$$

$$\frac{\partial L}{\partial c_1} = \beta u'(c_1) - \lambda_1 + v_1 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_1} = -\lambda_0 + \lambda_1 f'(k_1) + \lambda_1(1-\delta) + H_0 = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_2} = -\lambda_1 + H_1 = 0$$

Complementary slacknes

$$\lambda_0[f(k_0) - c_0 - k_1 + (1-\delta)k_0] = 0$$

$$\lambda_1[f(k_1) - c_1 - k_2 + (1{-}_{\delta})k_1] = 0$$

$$v_0 c_0 = 0 \qquad v_1 c_1 = 0 \qquad H_0 k_1 = 0 \qquad H_1 k_2 = 0$$

Ahora, utilizando la intuición económica, determinas que variables o multiplicadores son $= 0$ y por lo tanto los puedes eliminar

Complementary slacknes

$$\lambda_0[f(k_0) - c_0 - k_1 + (1-\delta)k_0] = 0$$

$$\lambda_1[f(k_1) - c_1 - k_2 + (1{-}_{\delta})k_1] = 0$$

$$\cancel{v_0}c_0 = 0 \qquad \cancel{v_1}c_1 = 0 \qquad \cancel{H_0}k_1 = 0 \qquad H_1\cancel{k_2} = 0$$

Solución del modelo

$$\mathcal{L} = u(c_o) + \beta u(c_1) + \lambda_0[f(k_0) - c_0 - k_1 + (1-\delta)k_0] + \lambda_1[f(k_1) - c_1 - k_2 + (1-_{\delta})k_1] + v_0 c_0 + v_1 c_1 + H_0 k_1 + H_1 k_2$$

C.P.O.

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_0} = u'(c_0) - \lambda_0 + \cancel{v_0} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad u'(c_0) = \lambda_0 \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_1} = \beta u'(c_1) - \lambda_1 + \cancel{v_1} = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \beta u'(c_1) = \lambda_1 \qquad (2)$$

$$\frac{\partial L}{\partial k_1} = -\lambda_0 + \lambda_1 f'(k_1) + \lambda_1(1-\delta) + \cancel{H_0} = 0 \qquad \Longrightarrow$$

$$\lambda_0 = \lambda_1[f'(k_1) + (1-\delta)] \qquad (3)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_2} = -\lambda_1 + H_1 = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad H_1 = \lambda_1$$

Recuerda que en este modelo no existen precios. Los resultados previos, por ejemplo $u'(c_0) = \lambda_0$ nos permite percatarnos que los multiplicadores son precios sombra. La relajación marginal de la restricción lleva a un incremento marginal en el objetivo que está siendo maximizado igual al multiplicador.

$\lambda_0 =$ valor marginal de los recursos en $t = 0$

Utilizando complementary slackness, y dado que de acuerdo a las ecuaciones (1) y (2) λ_0 y λ_1 no pueden ser 0 tenemos

$$\cancel{\lambda_0[f(k_0) - c_0 - k_1 + (1-\delta)k_0]} = 0$$

$$\cancel{\lambda_1[f(k_1) - c_1 - k_2 + (1-_{\delta})k_1]} = 0$$

por lo tanto

$$f(k_0) = c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0 \implies c_0 = f(k_0) - k_1 + (1-\delta)k_0 \quad (4)$$

$$f(k_1) = c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1 \implies c_1 = f(k_1) - k_2 + (1-\delta)k_1 \quad (5)$$

Obtenemos la ecuación de Euler
sustituyendo eqs (1) y (2) en (3)

$$u'(c_0) = \beta u'(c_1)[f'(k_1) + (1 - \delta)]$$

Si queremos obtener la ecuación de Euler como una función solamente del capital sustituimos las eqs (4) y (5) en el resultado previo

$$u'(f(k_0) - k_1 + (1 - \delta)k_0) =$$
$$\beta u'(f(k_1) - k_2 + (1 - \delta)k_1)[f'(k_1) + (1 - \delta)]$$

Esperamos te sirva este material