Programación Dinámica I (Dynamic Programming I) Introducción

Economía para Todos
Jacques Lartigue Mendoza

Noviembre 3, 2020

Ventajas de Programación dinámica

- Proporciona reglas de política (policy functions)
- En el método secuencial (sequential method) se necesita resolver una secuencia infinita (o para T-1 períodos) de ecuaciones en diferencias. Lo cual a veces no es posible. En programación dinámica no es necesario
- El problema de optimización dinámica lo puedes resolver de forma analítica (utilizando matemáticas) o numérica (en la computadora)

Diferencias con métodos secuenciales

- En el método secuencial el problema se resuelve tomando las Condiciones de Primer Orden (CPO) y resolviendo el sistema de ecuaciones resultante
- La programación dinámica rompe un problema de optimización dinamica en subproblemas más simples. En lugar de resolver el problema una sola vez (para todo período de tiempo t), se resuelve recursivamente (período por período), empezando del último período hacia atrás (backward procedure)

Elementos de programación dinámica

- **Choice variables**: Son las variables para las cuales el agente económico puede escoger su valor. Al agente economico le interesa, como en todo problema de optimización, escoger el valor óptimo para cada una de éstas
- **State variables**: Son las variables sobre las cuales no tiene ingerencia el agente económico el día que toma la decisión. Estas variables proporcionan la información que necesita el agente económico para tomar decisiones óptimas. Estas variables tienen una regla de evolución o son estocásticas

Elementos de programación dinámica

- **Policy function $g_j(*)$(regla de política, función de política, regla de decisión)**: Es una función de las variables de estado. Proporcionan una regla (función) que da la respuesta óptima del agente económico para cualquier día de su vida (período de tiempo) y para cualquier valor de las variables de estado. En otras palabras proporcionan la elección óptima en el período j. Son análogas a las curvas de reacción en un modelo estático -por ejemplo en el modelo de Cournot-

Elementos de programación dinámica

- **Value function** $V_j(*)$: Es el máximo valor que puede tomar, a través del tiempo, la función a optimizar. Es una función de las variables de estado
- **Constraints (restricciones)**: Son las restricciones que enfrenta el agente económico
- **Bellman equation**: Es el plantemiento del problema a optimizar. Incluye la value function y las restricciones

Formato general de la ecuación de Bellman

$$V_j(var.edo.) = max\{\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \; func.obj.\}$$

sujeto a

$$restricciones$$

Equivalente a:

$$V_j(var.edo.) = max\{func.obj. + [max \sum_{t=1}^{\infty} \beta^t fun.obj \; s.a. \; restricciones]\}$$

s.a.

$$restricciones$$

El formato general para un modelo de crecimiento económico es

$$V_j(k) = \max_{c,k'}\{u(c) + \beta V_{j-1}(k')\}$$

$$s.a.$$

$$c + i = f(k)$$

$$i = k' - k + \delta k$$

Metodología para resolver el problema

- 1. Se resuelve el último día de vida del agente económico. La solución será una policy function para cada variable de elección y la value function correspondiente a ese día de vida; en esta última se sustituyen las policy functions obtenidas
- 2. La value function del último día de vida se sustituye dentro de la value funtion del penúltimo día de vida. Se repite el procedimiento previo, pero ahora para el penúltimo día de vida, es decir se obtienen las policy functions correspondientes, las cuales se sustituyen en la value function de este penúltimo día de vida
- 3. Se continúa repitiendo el procedimiento hacia días previos (backward) hasta que observamos que convergemos a policy functions que tienen la misma forma funcional. Se obtiene adicionalmente la value fuction cuyo valor es el máximo posible para toda la vida del agente económico

Ejemplo del planteamiento del problema

No incluye solución final. Mismo problema que resolvimos con sequential methods: El agente económico vive dos periodos, 0 y 1, en el 2 está muerto

$$\max_{c_0, c_1, k_1, k_2} [u(c_0) + \beta u(c_1)]$$

$$s.a.$$

$$c_0 + k_1 - (1 - \delta)k_0 \leq f(k_0)$$

$$c_1 + k_2 - (1 - \delta)k_1 \leq f(k_1)$$

$$k_1, k_2, c_0, c_1 \geq 0; \quad k_0 \ dado$$

1. El problema a resolver el último día de vida (t = 1) es

$$\max_{c_1,k_2} u(c_1)$$

$$s.a.$$

$$c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1 \leq f(k_1)$$

$$k_2, c_1 \geq 0, \quad k_1 \ dado$$

- Esta lámina solo es para que entiendas el problema que estás resolviendo, no es necesario que la escribas cuando estás utilizando programación dinámica

1. La ecuación de Bellman correspondiente al último día de vida (t = 1) es

$$V_1(k_1) = \max_{c_1, k_2} u(c_1) + \beta 0$$

$$s.a.$$

$$c_1 + k_2 - (1-\delta)k_1 \leq f(k_1)$$

$$k_2, c_1 \geq 0, \quad k_1 \; dado$$

- Para resolver el último día de vida no necesitarás realizar derivadas, lo resolverás con pura intuición económica

Resolviendo el último día de vida

- Como el agente económico no tiene herederos, no desea dejar capital para cuando esté muerto (t = 2). Por lo que la policy function para el capital será

$$g_1^k(k_1) = k_2 = 0$$

- Así, a efecto de maximizar su utilidad, el último día de su vida el agente económico se comerá todo lo que produzca en este día y todo el capital que le quede. Por lo que la policy function del consumo será

$$g_1^c(k_1) = c_1 = f(k_1) + (1 - \delta)k_1$$

- Las policy functions obtenidas sustituyen a las variables de elección en la value function que estamos maximizando $V_1(k_1) = \max u(c_1) + \beta 0$. Como ya incluirá a las soluciones óptimas (policy functions), la value function ya no incluirá el max. Adicionalmente, como $\beta 0 = 0$ ya no se escribe este término, quedando

$$V_1(k_1) = u(f(k_1) + (1 - \delta)k_1)$$

- Observa que tanto las policy functions como la value function son funciones de la/s variable/s de estado

2. Solución del penúltimo día de vida (t = 0)

- La solución nos dará las policy functions, para este día, de las variables de control $c_0 = g_2^c(k_0)$ y $k_1 = g_2^k(k_0)$, y el máximo valor hasta este día (de adelante hacia atrás) de la función que estamos maximizando (la value function)

La ecuación de Bellman del penúltimo día es

$$V_2(k_0) = \max_{c_0, k_1}[u(c_0) + \beta V_1(k_1)]$$

$$s.a.$$

$$c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0 \leq f(k_0); \quad k_1, c_0 \geq 0; \quad k_0 \; dado$$

- Sustituyendo la value function resultante del último día en la value function del penúltimo día, la ecuación de Bellman a resolver es

$$V_2(k_0) = \max_{c_0, k_1}[u(c_0) + \beta u(f(k_1) + (1-\delta)k_1)]$$

$$s.a.$$

$$c_0 + k_1 - (1-\delta)k_0 \leq f(k_0); \quad k_1, c_0 \geq 0; \quad k_0 \; dado$$