Optimización Dinámica. Calibración de Parámetros. Modelo de Crecimiento de Ciclos Económicos Reales. (Real Business Cycle Economic Growth Model)

Economía para Todos
Jacques Lartigue Mendoza

Noviembre 18, 2020

Formalmente nuestro modelo lo podemos escribir como

Las preferencias están dadas por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{[C_t v(L_t)^{\theta}]^{1-\sigma} - 1}{1-\sigma}$$

La función de producción de la economía esta dada por

$$Y_t = A_t K_t^{\alpha} (X_t N_t)^{1-\alpha} \qquad \forall t$$

La economía está sujeta a la restricción de la producción y del tiempo disponible

$$C_t + I_t = Y_t, \qquad L_t + N_t = 1 \qquad \forall t$$

y a la regla de evolución del capital

$$K_{t+1} - K_t = I_t - \delta K_t \qquad \forall t$$

en donde

$$\beta \in (0,1), \qquad X_{t+1} = \gamma X_t, \qquad X_0 = 1$$

Solución pregunta 1

- Transformamos el modelo para hacerlo estacionario, reescalando todas las variables que crecen en la senda de crecimiento balanceado (balanced growth path). Para cualquier $Z_t \rightarrow z_t = \frac{Z_t}{X_t}$

definimos

$$k_t = \frac{K_t}{X_t}, \qquad y_t = \frac{Y_t}{X_t}, \qquad i_t = \frac{I_t}{X_t}, \qquad c_t = \frac{C_t}{X_t}$$

- Transformamos la restricción de la producción, dividiendo ambos lados de la ecuación entre X_t

$$\frac{C_t}{X_t} + \frac{I_t}{X_t} = \frac{Y_t}{X_t} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{c_t + i_t = y_t}$$

- Transformamos la función de producción, dividiendo ambos lados de la ecuación entre X_t

$$\frac{Y_t}{X_t} = \frac{A_t K_t^{\alpha} (X_t N_t)^{1-\alpha}}{X_t} \quad \rightarrow \quad y_t = \frac{A_t K_t^{\alpha} \cancel{X_t^{1-\alpha}} N_t^{1-\alpha}}{X_t^{\alpha} \cancel{X_t^{1-\alpha}}}$$

$$\boxed{y_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}}$$

- Transformamos la función de acumulación de capital, dividiendo ambos lados de la ecuación entre X_t

$$\frac{K_{t+1}}{X_t} = \frac{(1-\delta)K_t + I_t}{X_t}$$

Como en la ecuación anterior tenemos un variable (t+1) dividida entre una variable (t), hacemos lo siguiente

$$\frac{K_{t+1}}{X_t}\frac{X_{t+1}}{X_{t+1}} = \frac{(1-\delta)K_t + I_t}{X_t} \quad \rightarrow \quad \boxed{\gamma k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t}$$

- Transformamos las preferencias, como no se trata de una igualdad (ecuación) no podemos dividirla entre X_t. Por lo que para no afectar las preferencias vamos a multiplica y dividir el numerador por X_t

$$\beta^t \frac{[\frac{X_t}{X_t} C_t v(L_t)^\theta]^{1-\sigma} - 1}{-1 - \sigma} \qquad \rightarrow \qquad \beta^t \frac{[X_t c_t v(L_t)^\theta]^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}$$

en la última ecuación nota que C_t fue cambiada por c_t tras haber sido dividida por X_t. Como $X_t = \gamma^t$, podemos hacer esta sustitución

$$\beta^t \frac{[\gamma^t c_t v(L_t)^\theta]^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{(\beta\gamma^{1-\sigma})^t \frac{[c_t v(L_t)^\theta]^{1-\sigma} - 1}{1 - \sigma}}$$

Solución pregunta 2

- Se nos pide reescribir las preferencias (función de utilidad) cuando $\sigma = 1$ y $v(L) = L$. Recordemos que las funciones de utilidad sirven para ordenar nuestras preferencias, por lo que es permitido realizar transformaciones monotónicas, las cuales mantienen la relación ordinal en las preferencias; así pues, podemos ignorar las constantes existentes en la función de utilidad

- Cuando $\sigma = 1 \rightarrow 1 - \sigma = 0$ por lo que la función de utilidad se podría pensar no está definida. Sin embargo, utilizando L' Hopital rule puede ser demostrado que la función de utilidad en cuestión se convierte en una función logarítmica. Considerando todo lo anterior, podemos reescribir la función de utilidad como

$$\boxed{\beta^t(log(C_t) + \theta log(L_t))}$$

Solución a pregunta 3

Tras las transformaciones realizadas en las preguntas 1 y2, podemos reescribir nuestro modelo como

Las preferencias están dadas por

$$\sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [log(C_t) + \theta log(L_t)]$$

La función de producción de la economía esta dada por

$$y_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \qquad \forall t$$

La economía está sujeta a la restricción de la producción y del tiempo disponible

$$c_t + i_t = y_t, \qquad L_t + N_t = 1 \qquad \forall t$$

y a la regla de evolución del capital

$$\gamma k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t \qquad \forall t$$

en donde

$$\beta \in (0,1), \qquad X_{t+1} = \gamma X_t, \qquad X_0 = 1$$

Definimos un equilibrio competitivo con comercio secuencial para esta economía

En un equilibrio competitivo cada uno de los agentes económicos participantes optimizan (los consumidores maximizan su satisfacción sujetos a diversas restricciones y las empresas maximizan sus beneficios) y los mercados se vacían (oferta = demanda)

Definición formal de equilibrio competitivo con comercio secuencial

Un equilibrio competitivo con comercio secuencial consiste en una sucesión (secuencia) de precios, $\{w_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{r_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, y una sucesión de cantidades, $\{c_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, $\{k_{t+1}^*\}_{t=0}^{\infty}$, $\{N_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, $\{L_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, $\{i_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, tal que

i) Dados los precios, $\{w_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{r_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, las cantidades son óptimas para los consumidores, es decir

$$\{c_t^*, k_{t+1}^*, N_t^*, L_t^*, i_t^*\}_{t=0}^{\infty} = argmax \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [log(c_t) + \theta log(L_t)] \qquad \forall t$$

sujeto a

$$c_t + i_t = w_t^* N_t + r_t^* k_t, \qquad L_t + N_t = 1 \qquad \forall t$$

$$\gamma k_{t+1} = (1-\delta) k_t + i_t \qquad \forall t$$

ii) Dados los precios, $\{w_t^*\}_{t=0}^{\infty}$ y $\{r_t^*\}_{t=0}^{\infty}$, las cantidades son óptimas para la empresa, es decir

$$\{k_t^*, N_t^*\}_{t=0}^{\infty} = argmax\{A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - w_t^* N_t - r_t^* k_t\} \qquad \forall t$$

iii) Los mercados se vacían (market clear)

$$c_t + i_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} \qquad \forall t$$

Caracterización del equilibrio

Caracterizar el equilibrio significa especificar todas las condiciones que se cumplen en el mismo, para llegar a ellas utilizaremos las Condiciones de Primer Orden (CPO) de la empresa y de los consumidores, así como el hecho de que los mercados se vacían. Por lo tanto

Resolvemos a la empresa

$$\textit{beneficios} = \textit{ingresos} - \textit{costos} \qquad \rightarrow \qquad \pi = py - \textit{costo laboral} - \textit{costo capital}$$

normalizando el precio del bien producido igual a 1 tenemos

$$\pi = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - w_t^* N_t - r_t^* k_t$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial k_t} = \alpha A_t k_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha} - r_t = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{r_t = \alpha A_t k_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}} \qquad (1)$$

$$\frac{\partial \pi}{\partial N_t} = (1-\alpha) A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} - w_t = 0 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{w_t = (1-\alpha) A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}} \qquad (2)$$

Resolvemos al consumidor

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{log(c_t) + \theta log(L_t) + \mu_t(1 - L_t - N_t) + \lambda_t((1-\delta)k_t - i_t - \gamma k_{t+1}) + \phi_t(w_t N_t + r_t k_t - c_t - i_t)\}$$

CPO

$$c_t : \frac{1}{c_t} - \phi_t = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{1}{c_t} = \phi_t \tag{3}$$

$$k_{t+1} : -\lambda_t \gamma + \beta \lambda_{t+1}(1-\delta) + \beta \phi_{t+1} r_{t+1} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\lambda_t \gamma = \beta \lambda_{t+1}(1-\delta) + \beta \phi_{t+1} r_{t+1} \tag{4}$$

$$N_t : -\mu_t + \phi_t w_t = 0 \quad \rightarrow \quad \mu_t = \phi_t w_t \tag{5}$$

$$L_t : \frac{\theta_t}{L_t} - \mu_t = 0 \quad \rightarrow \quad \frac{\theta_t}{L_t} = \mu_t \tag{6}$$

$$i_t : \lambda_t - \phi_t = 0 \quad \rightarrow \quad \lambda_t = \phi_t \tag{7}$$

sustituyendo la ecuación (3) y (7) en la (4) obtenemos la ecuación de Euler

$$\boxed{\frac{\gamma}{c_t} = \beta \frac{1}{c_{t+1}}[(1-\delta) + r_{t+1}]} \qquad \forall t \tag{8}$$

sustituyendo las ecuaciones (3) y (5) en la (6) obtenemos la condición de intertemporalidad

$$\boxed{\frac{\theta_t}{L_t} = \frac{w_t}{c_t}} \qquad \forall t \tag{9}$$

Así pues, el equilibrio se caracteriza con todas aquellas ecuaciones que se cumplen en él, las cuales incluyen: a) las restricciones que se deben cumplir en todo momento, en este caso restricciones del consumidor; b) el hecho de que los mercados se vacían; y, c) las ecuaciones resultantes de la optimización de cada agente económico participante.

Ecuaciones que caracterizan al equilibrio

Las restricciones que se deben cumplir (en este caso las del consumidor)

$$c_t + i_t = w_t N_t + r_t k_t, \qquad L_t + N_t = 1, \qquad \gamma k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

Los mercados se vacían (market clear)

$$c_t + i_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$$

La empresa optimiza

$$r_t = \alpha A_t k_t^{\alpha-1} N_t^{1-\alpha}$$

$$w_t = (1-\alpha) A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}$$

Los consumidores optimizan

$$\frac{\gamma}{c_t} = \beta \frac{1}{c_{t+1}}[(1-\delta) + r_{t+1}]$$

$$\frac{\theta_t}{L_t} = \frac{w_t}{c_t}$$

Solución pregunta 4

Asumiendo que estamos en la senda de crecimiento estacionario (balanced growth path), vamos a calibrar los parámetros $(\alpha, \beta, \gamma, \delta, \theta)$ tal que: i) $\frac{wN}{y} = 2/3$; ii) $N = 0.2$; iii) $\gamma = 1.004$; iv) $\frac{c}{y} = 0.79$; and, v) $\frac{k}{y} = 7.35$

calibración de α

$$\frac{wN}{y} = 2/3 \tag{10}$$

sustituimos w, así como y, por los resultados previos

$$\frac{(1-\alpha)A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} N}{A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}} = 2/3 \tag{11}$$

$$\frac{(1-\alpha)\cancel{A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} N}}{\cancel{A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}}} = 2/3 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\alpha = 1/3} \tag{12}$$

calibración de δ

Buscamos una ecuación en donde aparezca δ y la despejamos. En este caso, usamos la regla de evolución del capital

$$\gamma k = (1-\delta)k + i$$

despejamos δ

$$\gamma k - (1-\delta)k = i \qquad \rightarrow \qquad \gamma k - k + \delta k = i \qquad \rightarrow \qquad k(\gamma - 1 + \delta) = i$$

$$\delta = 1 + \frac{i}{k} - \gamma$$

para encontrar δ necesitamos i/k, por lo que para encontrar este último utilizamos la restricción de los recursos $c + i = y$. Dividimos ambos lados de ésta entre y, además multiplicamos y dividimos el segundo término por k (lo cual no afecta el valor de este término)

$$\frac{c}{y} + \frac{i}{k}\frac{k}{y} = 1 \qquad \rightarrow \qquad \frac{i}{k} = \frac{1 - \frac{c}{y}}{\frac{k}{y}}$$

sustituyendo los resultados previos, así como los ratios que conocemos de las estadísticas de la economía, obtenemos

$$\delta = 1 + \frac{1 - 0.79}{7.35} - 1.004 \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\delta = 0.025}$$

Calibración de β

Utilizamos la ecuación de Euler, ya que aquí tenemos β

$$\frac{\gamma}{c} = \beta\frac{1}{c}[(1-\delta)+r]$$

Multiplicamos ambos lados de la ecuación por c. Además, sustituimos r por lo obtenido en la ecuación uno ($r = \alpha A k^{\alpha-1} N^{1-\alpha}$)

$$\gamma = \beta[1-\delta+\alpha\frac{y}{k}]$$

$$\beta = \frac{\gamma}{1-\delta+\alpha\frac{y}{k}} \quad \rightarrow \quad \beta = \frac{1.004}{1-0.025+\frac{1}{3}\frac{1}{7.35}} \quad \rightarrow \quad \boxed{\beta = 0.984}$$

calibración de θ

Para ello utilizamos la condición intertemporal, la cual es la única ecuación, del conjunto de ecuaciones que caracterizan al equilibrio, en donde aparece θ

$$\frac{\theta}{L} = \frac{w}{c}$$

sustituimos L por $1 - N$ y w por el resultado que obtuvimos cuando optimizamos a la empresa, en el cual w = productividad marginal del trabajo $(w = (1-\alpha)Ak^{\alpha}N^{-\alpha})$, obteniendo

$$\frac{\theta}{1-N} = (1-\alpha)\frac{y}{N}\frac{1}{c} \qquad \rightarrow \qquad \theta = (1-\alpha)\frac{y}{c}\frac{1-N}{N}$$

$$\theta = \frac{2}{3}\frac{1}{0.79}\frac{0.8}{0.2} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\theta = 3.375}$$

Planificador Social	**Economía de Mercado**
Consumidor representativo Max Función utilidad s.a. a) Restricción recursos * b) Restricción tiempo c) Regla evolución capital d) Variables no negativas (opc)	**Consumidor representativo** Max Función utilidad s.a. a) Restricción presupuestaria** b) Restricción tiempo c) Regla evolución capital d) Variables no negativas (opc) **Empresa representativa** Max función beneficio (no está sujeta a restricciones) **Mercados se vacían** Demanda = Oferta (producción)

Nota1. No hay mercados, por lo tanto no hay precios

Nota 1. El consumidor es dueño de insumos producción (trabajo y capital) y se los renta a la empresa

* con + inv = producción

**con + inv = ing lab + ing no lab

Planteamiento planificador social vs economía mercado

Planificador Social	**Economía de Mercado**
Consumidor representativo	**Consumidor representativo**
$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [log(c_t) + \theta log(L_t)]$	$\max \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [log(c_t) + \theta log(L_t)]$
s.a.	s.a.
$c_t + i_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$	$c_t + i_t = w_t^* N_t + r_t^* k_t$
$L_t + N_t = 1$	$L_t + N_t = 1$
$\gamma k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$	$\gamma k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$
$c_t, i_t, k_{t+1} > 0$	$c_t, i_t, k_{t+1} > 0$
	Empresa representativa*
	$\max \pi = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - w_t^* N_t - r_t^* k_t$
	Mercados se vacían
	$c_t + i_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}$

* El precio del bien producido fue normalizado a 1 (ahora todos los precios son relativos a éste)

Pregunta 4. Soluciona el modelo como una economía planificada y demuestra que el resultado es el mismo que en una economía de mercado (bajo competencia perfecta)

Pregunta 4. Solución del modelo como economía planificada

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \{log(c_t) + \theta log(L_t) + \lambda_t[A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha} - c_t - \gamma k_{t+1} + (1-\delta)k_t] + \mu_t(1 - L_t - N_t)\}$$

CPO

$$c_t : \beta^t \frac{1}{c_t} - \beta^t \lambda_t = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{c_t} = \lambda_t} \tag{13}$$

$$k_{t+1} : -\beta^t \lambda_t \gamma + \beta^{t+1}\lambda_{t+1}(1-\delta) + \beta^{t+1}\lambda_{t+1}\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} = 0 \quad \rightarrow$$

$$\boxed{\lambda_t \gamma = \beta \lambda_{t+1}[\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta)]} \tag{14}$$

$$N_t : \beta^t (1-\alpha)\lambda_t A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} - \beta^t \mu_t = 0 \rightarrow \boxed{(1-\alpha)\lambda_t A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha} = \mu_t} \tag{15}$$

$$L_t : \beta^t \frac{\theta_t}{L_t} - \beta^t \mu_t = 0 \quad \rightarrow \quad \boxed{\frac{\theta_t}{L_t} = \mu_t} \tag{16}$$

sustituyendo la ecuación (13) en la (14) obtenemos la ecuación de Euler

$$\boxed{\frac{1}{c_t}\gamma = \beta\frac{1}{c_{t+1}}[\alpha A_{t+1}k_{t+1}^{\alpha-1}N_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta)]} \tag{17}$$

combinando las ecuaciones (13), (15) y (16) obtenemos la condición intertemporal

$$\boxed{\frac{\theta_t}{L_t} = \frac{(1-\alpha)A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}}{c_t}} \tag{18}$$

Ecuaciones resultantes bajo un planificador social

Las restricciones se cumplen

$$c_t + i_t = A_t k_t^{\alpha} N_t^{1-\alpha}, \qquad L_t + N_t = 1, \qquad \gamma k_{t+1} = (1-\delta)k_t + i_t$$

La ecuación de Euler y la condición intertemporal

$$\frac{\gamma}{c_t} = \beta \frac{1}{c_{t+1}} [\alpha A_{t+1} k_{t+1}^{\alpha-1} N_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta)]$$

$$\frac{\theta_t}{L_t} = \frac{(1-\alpha) A_t k_t^{\alpha} N_t^{-\alpha}}{c_t}$$