Optimización Dinámica
Modelo de Crecimiento Económico
Economía Planificada
Método Secuencial

Economía para Todos
Jacques Lartigue Mendoza

Noviembre 11, 2020

Vamos a resolver un modelo de crecimiento económico, dentro del marco del planificador social, en el que

- Existe un planificador social benevolente, quien busca maximizar la utilidad (felicidad) de la población (representada por un agente económico)
- El agente económico vive durante un perìodo infinito y recibe utilidad del consumo, c_t, y del tiempo libre, $1 - n_t$
- La economía enfrenta tanto a la usual restricción de los recursos, la cual indica que el consumo más la inversión bruta, i_t, no pueden exceder a la producción, $k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$, como a la regla de evolución del capital, la cual indica que la inversión neta, $k_{t+1} - k_t$, es igual a la inversión bruta menos la depreciación, δk_t

- Siguiendo lo observado en cualquier sociedad, ni el capital dejado para el período subsecuente, k_{t+1}, ni el consumo pueden ser negativos. Adicionalmente, el tiempo dedicado a trabajar, n_t, no puede exceder al 100 % del tiempo disponible del agente económico representativo

De este modelo encuentra lo siguiente: [3mm]

- 1) Utilizando el método secuencial, determina las condiciones que se deben cumplir en el óptimo
- 2)Obtén 3 ecuaciones, que incluyan únicamente al consumo, capital, trabajo y a los parámetros (es decir, elimina los multiplicadores lagrangianos). Interpreta las ecuaciones
- 3)En el estado estacionario, cual es el ratio de la inversión al capital, i_t/k_t, del capital al trabajo, k_t/n_t, y del consumo al capital, c_t/k_t. Expresa estos ratios en términos de los parámetros

Formalmente nuestro modelo lo podemos escribir como

$$\max_{c_t, n_t, i_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{[c_t^{\mu}(1-n_t)^{1-\mu}]^{1-\sigma}-1}{1-\sigma}$$

sujeto a la restricción de la producción

$$c_t + i_t \leq k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} \qquad \forall t$$

a la regla de evolución del capital

$$k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t \qquad \forall t$$

y a que el consumo, el capital y el tiempo trabajado no pueden ser negativos, mientras que este último no puede exceder el 100% del tiempo disponible

$$0 \leq c_t, \qquad 0 \leq k_{t+1}, \qquad 0 \leq n_t \leq 1 \qquad \forall t$$

Alternativamente, para evitar usar la regla de la cadena en las derivadas, lo podemos escribir como

$$\max_{c_t, n_t, i_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{\mu(1-\sigma)}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)} - 1}{1-\sigma}$$

sujeto a la restricción de la producción

$$c_t + i_t \leq k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} \qquad \forall t$$

a la regla de evolución del capital

$$k_{t+1} - k_t = i_t - \delta k_t \qquad \forall t$$

y a que el consumo, el capital y el tiempo trabajado no pueden ser negativos, mientras que este último no puede exceder el 100% del tiempo disponible

$$0 \leq c_t, \qquad 0 \leq k_{t+1}, \qquad 0 \leq n_t \leq 1 \qquad \forall t$$

Antes de resolverlo, lo simplificamos combinando la restricción de los recursos con la regla de evolución del capital

$$\max_{c_t, n_t, k_{t+1}} \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t \frac{c_t^{\mu(1-\sigma)}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)} - 1}{1-\sigma}$$

sujeto a la restricción de la producción combinada con la regla de evolución del capital

$$c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t \leq k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} \qquad \forall t$$

y a que el consumo, el capital y el tiempo trabajado no pueden ser negativos, mientras que este último no puede exceder el 100% del tiempo disponible

$$0 \leq c_t, \qquad 0 \leq k_{t+1}, \qquad 0 \leq n_t \leq 1 \qquad \forall t$$

Solución del modelo
Respuesta a la pregunta (1)

Las condiciones que se deben cumplir en el óptimo son las condiciones de Kuhn Tucker:

a) Condiciones de Primer Orden (CPO)
b) Complementary slackness
c) Las restricciones de desigualdad se cumplen
d) Las restricciones de igualdad se cumplen
e) Multimplicadores no negativos

a) C.P.O.

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\frac{c_t^{\mu(1-\sigma)}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)} - 1}{1-\sigma}$$

$$+\lambda_t(k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \phi_t k_{t+1} + v_t c_t + \gamma_t n_t + \theta_t(1-n_t)]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \beta^t \frac{\mu(1-\sigma)c_t^{\mu(1-\sigma)-1}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)}}{1-\sigma} - \beta^t \lambda_t + \beta^t v_t = 0 \quad (1)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_t} = \beta^t \frac{(-1)(1-\mu)(1-\sigma)c_t^{\mu(1-\sigma)}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)-1}}{1-\sigma} + \beta^t \lambda_t (1-\alpha) k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} + \beta^t \gamma_t - \beta^t \theta_t = 0 \quad (2)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = \beta^t \phi_t - \beta^t \lambda_t + \beta^{t+1} \lambda_{t+1} \alpha k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + \beta^{t+1} \lambda_{t+1}(1-\delta) = 0 \quad (3)$$

b) Complementary slackness

$$\lambda_t(k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) = 0 \tag{4}$$

$$\phi_t k_{t+1} = 0 \tag{5}$$

$$v_t c_t = 0 \tag{6}$$

$$\gamma_t n_t = 0 \tag{7}$$

$$\theta_t(1 - n_t) = 0 \tag{8}$$

c) Las restricciones de desigualdad se cumplen

$$c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t \leq k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} \qquad \forall t$$

$$0 \leq c_t, \qquad 0 \leq k_{t+1}, \qquad 0 \leq n_t \leq 1 \qquad \forall t$$

d) Las restricciones de igualdad se cumplen

No existen

e) Multiplicadores no negativos

$$0 \leq \lambda_t, \qquad 0 \leq v_t, \qquad 0 \leq \gamma_t, \qquad 0 \leq \theta_t, \qquad 0 \leq \phi_t \qquad \forall t$$

La primera derivada de la función de utilidad respecto al consumo es positiva, por lo que sabemos que la utilidad marginal del consumo es positiva, adicionalmente cumple con las condiciones de Inada. Asi pues nunca será óptimo para el agente economico un consumo igual a cero. Idem con el tiempo libre, $1 - n_t$

Adicionalmente, para consumir se tiene que porducir, por lo que no será óptimo $k_{t+1}, n_t = 0$. Por lo que

b) Complementary slackness

$$\lambda_t \cancel{(k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t)} = 0 \tag{9}$$

$$\cancel{\phi_t} k_{t+1} = 0 \tag{10}$$

$$\cancel{v_t} c_t = 0 \tag{11}$$

$$\cancel{\gamma_t} n_t = 0 \tag{12}$$

$$\cancel{\theta_t}(1 - n_t) = 0 \tag{13}$$

a) C.P.O. utilizando el análisis anterior y dividiendo ambos lados de cada ecuación por β^t

$$\mathcal{L} = \sum_{t=0}^{\infty} \beta^t [\frac{c_t^{\mu(1-\sigma)}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)} - 1}{1-\sigma}$$

$$+\lambda_t(k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha} - c_t - k_{t+1} + (1-\delta)k_t) + \phi_t k_{t+1} + v_t c_t + \gamma_t n_t + \theta_t(1-n_t)]$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} = \cancel{\beta^t} \frac{\mu\cancel{(1-\sigma)} c_t^{\mu(1-\sigma)-1}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)}}{\cancel{1-\sigma}} - \cancel{\beta^t}\lambda_t + \cancel{\beta^t v_t} = 0 \qquad (14)$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_t} = \cancel{\beta^t} \frac{(-1)(1-\mu)\cancel{(1-\sigma)} c_t^{\mu(1-\sigma)}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)-1}}{\cancel{1-\sigma}} \qquad (15)$$

$$+\cancel{\beta^t}\lambda_t(1-\alpha)k_t^{\alpha} n_t^{-\alpha} + \cancel{\beta^t \gamma_t} - \cancel{\beta^t \theta_t} = 0$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} = \cancel{\beta^t \phi_t} - \cancel{\beta^t}\lambda_t + \beta^{\cancel{t}+1}\lambda_{t+1}\alpha k_{t+1}^{\alpha-1} n_{t+1}^{1-\alpha} + \beta^{\cancel{t}+1}\lambda_{t+1}(1-\delta) = 0 \qquad (16)$$

a) C.P.O. difinitivas

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial c_t} \rightarrow \qquad \mu c_t^{\mu(1-\sigma)-1}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)} = \lambda_t \tag{17}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial n_t} \rightarrow \qquad (1-\mu)c_t^{\mu(1-\sigma)}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)-1} = \lambda_t(1-\alpha)k_t^{\alpha}n_t^{-\alpha} \tag{18}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial k_{t+1}} \rightarrow \qquad \lambda_t = \beta\lambda_{t+1}[\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha} + (1-\delta) \tag{19}$$

Respuesta a pregunta (2)

sustituyendo la ecuación (17) en la (18) obtenemos

$$(1-\mu)c_t^{\mu(1-\sigma)}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)-1} = [\mu c_t^{\mu(1-\sigma)-1}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)}](1-\alpha)k_t^{\alpha}n_t^{-\alpha} \quad (20$$

sustituyendo la ecuación (17) en la (19) obtenemos la ecuación de Euler

$$\mu c_t^{\mu(1-\sigma)-1}(1-n_t)^{(1-\mu)(1-\sigma)} = \beta\mu c_{t+1}^{\mu(1-\sigma)-1}(1-n_{t+1})^{(1-\mu)(1-\sigma)}[\alpha k_{t+1}^{\alpha-1}n_{t+1}^{1-\alpha}+(1-\delta)] \quad (21)$$

recordando la restricción de los recursos

$$c_t + k_{t+1} - k_t + \delta k_t \leq k_t^{\alpha}n_t^{1-\alpha} \qquad \forall t \qquad (22)$$

Las ecuaciones (20),(21) y (22) constituyen tres ecuaciones que incluyen únicamente a las variables consumo, trabajo y capital, así como a los parámetros

Respuesta a pregunta (3)

- En el estado estacionario $z_t = z_{t+1} = z$. Para cada ratio solicitado, vamos a buscar y utilizar la ecuación que contenga las variables incluidas en el ratio

Para encontrar el ratio k/n utilizamos la ecuación de Euler

$$\mu c^{\mu(1-\sigma)-1}(1-n)^{(1-\mu)(1-\sigma)} = \beta\mu c^{\mu(1-\sigma)-1}(1-n)^{(1-\mu)(1-\sigma)}[\alpha k^{\alpha-1}n^{1-\alpha}+(1-\delta)]$$

$$U_c = \beta U_c[\alpha k^{\alpha-1}n^{1-\alpha} + (1-\delta)]$$

dividiendo ambos lados entre U_c obtenemos

$$1 = \beta[\alpha(\frac{k}{n})^{\alpha-1} + (1-\delta)]$$

dividiendo ambos lados entre $\alpha\beta$

$$\frac{1}{\alpha\beta} = (\frac{k}{n})^{\alpha-1} + \frac{\beta(1-\delta)}{\alpha\beta}$$

reordenando términos

$$\frac{k}{n} = (\frac{1}{\alpha\beta} - \frac{\beta(1-\delta)}{\alpha\beta})^{\frac{1}{\alpha-1}} \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{k}{n} = (\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta})^{\frac{1}{\alpha-1}}}$$

Para encontrar el ratio i/k utilizamos el hecho de que en el estado estacionario la inversión = depreciación

$$i = \delta k \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{i}{k} = \delta}$$

Para encontrar el ratio c/k utilizamos la restricción de los recursos

$$c_t + k_{t+1} - (1-\delta)k_t = k_t^{\alpha} n_t^{1-\alpha}$$

$$c + \cancel{k} - \cancel{k} + \delta k = k^{\alpha} n^{1-\alpha}$$

dividiendo ambos lados entre k

$$\frac{c}{k} + \delta = \frac{k^{\alpha}}{k} n^{1-\alpha} \qquad \rightarrow \qquad \frac{c}{k} + \delta = k^{\alpha-1} n^{1-\alpha}$$

$$\frac{c}{k} = \frac{k}{n}^{\alpha-1} - \delta$$

utilizando el resultado previo

$$\frac{c}{k} = [(\frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta})^{\frac{1}{\alpha-1}}]^{\alpha-1} - \delta \qquad \rightarrow \qquad \boxed{\frac{c}{k} = \frac{1-\beta+\beta\delta}{\alpha\beta} - \delta}$$