Funciones de producción: rendimientos a escala, marginales y condiciones de Inada

Economía para Todos
Jacques Lartigue Mendoza

Agosto 24, 2020

Una función de producción nos dice como se combinan los insumos para producir bienes o servicios

- Pero los insumos se pueden combinar de diferentes formas, por lo que existen diversas funciones de producción
- Así pues es necesario analizar las características o propiedades de estas funciones

Propiedades de una función de producción

- Rendimientos a escala
- Rendimiento marginales
- Condiciones de Inada

Propiedades de una función de producción

Rendimientos a escala

Esta propiedad nos dice que sucede con la producción cuando multiplicamos cada uno de los insumos por una constante.
Si al multiplicar cada uno de los insumos por la constante "a" la producción total crece

- $<$ a, tenemos rendimientos decrecientes a escala
- $=$ a, tenemos rendimientos constantes a escala
- $>$ a, tenemos rendimientos crecientes a escala

Propiedades de una función de producción

Rendimientos marginales

Esta propiedad nos dice que sucede con la producción cuando incrementamos uno de los insumos manteniendo el resto constantes.

Para saberlo se utiliza la primera y segunda derivada parcial.

Propiedades de una función de producción

Condiciones de Inada

Esta propiedad nos dice que sucede con la producción cuando uno de los insumos se acerca a cero o cuando se acerca a infinito.

Para saberlo se evalúa la primera derivada en los límites. Esto es, cuando el insumo bajo análisis se acerca a 0 ó a infinito

Características de la función de producción neoclásica

- Rendimientos constantes a escala
- Rendimiento marginales positivos pero decrecientes
- Condiciones de Inada

Rendimientos a escala

Si multiplicamos cada uno de los insumos –con excepción de la tecnología, que es un bien no rival- por una constante, la producción también se multiplicará por la misma constante.

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{1}$$

Rendimientos a escala

Si multiplicamos cada uno de los insumos –con excepción de la tecnología, que es un bien no rival- por una constante, la producción también se multiplicará por la misma constante.

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{2}$$

$$f(ax_1, ax_2) = (ax_1)^{\frac{13}{3}} (ax_2)^{\frac{4}{8}} \tag{3}$$

Rendimientos a escala

Si multiplicamos cada uno de los insumos –con excepción de la tecnología, que es un bien no rival- por una constante, la producción también se multiplicará por la misma constante.

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{4}$$

$$f(ax_1, ax_2) = (ax_1)^{\frac{13}{3}} (ax_2)^{\frac{4}{8}} \tag{5}$$

$$f(ax_1, ax_2) = a^{\frac{13}{3}} x_1^{\frac{13}{3}} a^{\frac{4}{8}} x_2^{\frac{4}{8}} = a^{\frac{13}{3}+\frac{4}{8}} x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{6}$$

$$f(ax_1, ax_2) = a^{\frac{116}{24}} x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{7}$$

En este caso vemos que nuestra función de producción tiene rendimientos crecientes a escala, ya que al multiplicar cada uno de los insumos por la constante "a" la producción crece más que si hubieramos multiplicado el total de la producción por "a".

Rendimientos a escala

Así, básicamente lo que determina si una función de producción tiene rendimientos decrecientes, constantes o crecientes a escala es la suma de los exponentes de los insumos

$$f(x_1, x_2) = Ax_1^b x_2^c \tag{8}$$

- si $b + c < 1$, tenemos rendimientos decrecientes a escala
- si $b + c = 1$, tenemos rendimientos constantes a escala
- si $b + c > 1$, tenemos rendimientos crecientes a escala

Rendimientos a escala

ó escrito de otra manerra

- si $f(tx_1, tx_2) < tf(x_1, x_2)$, tenemos rendimientos decrecientes a escala

- si $f(tx_1, tx_2) = tf(x_1, x_2)$, tenemos rendimientos constantes a escala

- si $f(tx_1, tx_2) > tf(x_1, x_2)$, tenemos rendimientos crecientes a escala

Producto marginal

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{9}$$

Producto marginal

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{10}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{13}{3} x_1^{\frac{10}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} > 0 \tag{11}$$

Por lo tanto tenemos un producto marginal positivo respecto a x_1

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = \frac{10}{3}\frac{13}{3} x_1^{\frac{7}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} > 0 \tag{12}$$

Por lo tanto tenemos un producto marginal positivo creciente respecto a x_1

Producto marginal

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{13}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{4}{8} x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{-4}{8}} > 0 \tag{14}$$

Por lo tanto tenemos un producto marginal positivo respecto a x_2

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = -\frac{4}{8}\frac{4}{8} x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{-12}{8}} < 0 \tag{15}$$

Por lo tanto tenemos un producto marginal positivo decreciente respecto a x_2

Condiciones de Inadal

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{16}$$

Evalúa la primera derivada respecto a x_1 en los límites

$$\lim_{x_1 \to \infty} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{13}{3} x_1^{\frac{10}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \neq 0 \tag{17}$$

$$\lim_{x_1 \to 0} \frac{\partial f}{\partial x_1} = \frac{13}{3} x_1^{\frac{10}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \neq \infty \tag{18}$$

Por lo tanto no se cumplen las condiciones de inada respecto a x_1

Condiciones de Inada

$$f(x_1, x_2) = x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{4}{8}} \tag{19}$$

Evalúa la primera derivada respecto a x_2 en los límites

$$\lim_{x_2 \to \infty} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{4}{8} x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{-4}{8}} = \frac{4}{8} \frac{x_1^{\frac{13}{3}}}{x_2^{\frac{4}{8}}} = 0 \tag{20}$$

$$\lim_{x_2 \to 0} \frac{\partial f}{\partial x_2} = \frac{4}{8} x_1^{\frac{13}{3}} x_2^{\frac{-4}{8}} = \frac{4}{8} \frac{x_1^{\frac{13}{3}}}{x_2^{\frac{4}{8}}} = \infty \tag{21}$$

Por lo tanto si se cumplen las condiciones de inada respecto a x_2

Analiza las siguientes 2 funciones de producción

$$f(x_1, x_2) = \frac{1}{5}x_1 x_2 \tag{22}$$

$$f(A, x_1, x_2) = Ax_1^{\frac{4}{7}}x_2^{\frac{3}{7}} \tag{23}$$

en donde A es un bien no rival